IN ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EUCLIDIS EXERCITATIO ACADEMICA AB AUDITORIBUS ALMI COLLEGII NEAPOLITANI D. THOMÆ AQUINATIS ... 14...

Gioacchino Maio

IN ELEMENTA

GEOMETRIÆ PLANÆ EUCLIDIS

EXERCITATIO ACADEMICA

AB AUDITORIBUS ALMI COLLEGII NEAPOLITANI

D. THOMÆ AQUINATIS

SERAPHINO CANZANO
GASPARO MISSIRETTI
SALVATORE PIGNATARO
THOMA FUSCO

XIIII. Calend. ſextiles anni 1759.

PUBLICE INSTITUENDA

AUSPICE

FRATRE JOACHIMO MAJO

Ordinis Prædicatorum Sacræ Theologiæ Baccalaureo, & Matheſeos, Eloquentiæ, ac Linguarum Orientalium Anteceſſore

NEAPOLI Excudebant Paullus, & Nicolaus Simonii MDCCLIX.

PUBLICA AUCTORITATE.

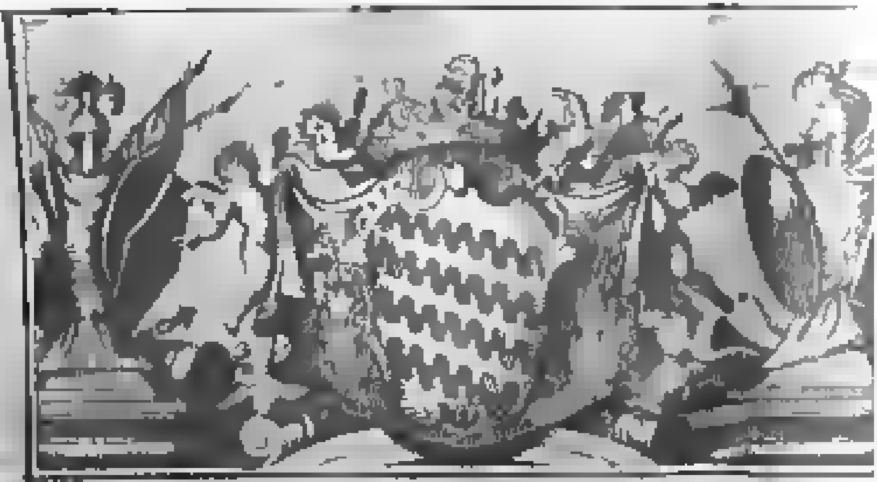
Erit ergo congruus ordo addiſcendi, ut primo quidem Pueri Logicalibus inſtruantur: ſecundo autem inſtruendi ſunt in Mathematicis: tertio in Naturalibus: quarto in Moralibus: quinto in Sapientialibus, & Divinis.

D. Thom. 6. Ethic.

Adoleſcentibus, eorumque ætati conveniunt Diſciplinæ Mathematicæ, quæ animum præparant, & defæcant, ut ipſa ad Philoſophiam capeſſendam idonea reddatur.

Plato apud Theonem Smyrnæum Cap. I.

Digitized by Google



IOANNI BAPTISTAE DE MARINIS
S. GERVASII PRINCIPI
EX HISPANIARVM PRIMATIBVS IANVAE PROCERIBVS
NEAPOLITANIS PATRICIIS
AVITIS MAIORVM IMAGINIBVS INSIGNIBVSQ. FASCIBVS
CLARISSIMO
EGREGIIS ANIMI DOTIBVS INGENVISQVE MORIBVS
SPECTATISSIMO
SECVNDIS AEQVE AC ADVERSIS TEMPORIBVS
REBVS GERENDIS
MIRAE DEXTERITATIS VIRO
REIPVBLICAE SEV AD AERVMNAS LEVANDAS
SEV AD ARDVA RERVM
NON SEMEL PRAESENTISSIMO
FR. IOACHIMVS MAIVS ORDINIS PRAEDICATORVM
MATHEMATICAE LINGVARVM ORIENTALIVM
ET ELOQVENTIAE
IN D. THOMAE LICAEO NEAPOLITANO ANTECESSOR
HASCE GEOMETRICAS PROPOSITIONES
A SVIS AVDITORIBVS IBIDEM
PVBLICE DEMONSTRANDAS
AVSPICI ET PRAESIDIO

PROŒMIUM.

Quamquam perexigua nimis, atque inutilia, nullo litterarum bono opportuna, & non niſi terendo tempori apta, a nonnullis in rem noſtram minus æquis, prima iſthæc Geometriæ Elementa judicentur, nihilo tamen ſecius ſi ad eam animi noſtri ingenitam indolem, qua ex minimis ſimplicibuſque principiis ad res ſummas, & reconditas, & ad abditiſſimarum veritatum notitiam gradatim ſemper adſurgere conſuevit mens noſtra, æqua lance libraverimus, mirumque eorundem in demonſtrationibus inſtruendis perſpicuitatem, in veritate conſequenda facilitatem, inque rebus firmandis certitudinem introſpexerimus, tanti & ad mentem ipſam illuſtrandam, & ad ſcientias quaslibet, arteſque nobiliores comparandas eadem valere comperiemus, ut iis deficientibus, ne digitum quidem proficere quis valeat in litteraria Republica, nec veritatem ullam exquirere. Hiſce de cauſis priſca mortalium gens ab uſque ipſis primordiis mira adſpectabilium rerum alliciente harmonia, & vitæ neceſſitate urgente, hujuſcemodi Elementa excolere, Juvenibus inſpirare, & ad omnem ſcientiam, artemque capeſſendam eadem ſibi cudere, atque aperire ſatagit. Quemnam eruditorum latet priſcos Phœnicios, Aſſyrios, Chaldæos, Babyloniosque & ad cœli, terræque mira contemplanda portenta, & ad inſtituenda commercia, & ad ineunda in omnibus fœdera nonniſi Arithmeticæ, & Geometriæ Elementis admoviſſe manus? Quem præterit ſapientiſſimos hominum Græcos his ſolum Elementis ſuos addixiſſe adoleſcentes, ut inde ad omnium ſcientiarum jugum felici exitu brevi gyro pertingerent. Ob id legimus, primum Græcorum ſapien-

tia

*tiæ auctorem Pythagoram triplex ad illos recte inſti-
tuendos conſtruxiſſe commentarium*, inſtitutivum, *nempe*
civile, *&* naturale, *quo univerſa eorum inſtitutio com-
prehenderetur, & ad omnem Philoſophiam recluderetur adi-
tus (a): indeque ejus diſcipuli ἀκουστικοὶ primum, deinceps μα-
θηματικοὶ, poſtremo φυσικοὶ vocitabantur, ut refert Gel-
lius (b); eo quod primum linguam exercere, tum aliquid
addiſcere, tandem rerum ſublimium notitiam adipiſci ſtu-
derent: atque ita prima iſthæc elementa*, mathemata, *ſeu
diſciplinæ univerſo Græcorum ore, nuncupata fuere. Hac
ex cauſa Plato eadem τὴν προπαιδείαν, ſeu* præviam eruditionem, *&* Philoſophiæ præludium *appellavit (c), ipſe-
que ſuæ Academiæ foribus inſculptum habebat οὐδεὶς ἀγεω-
μέτρητος εἰσίτω, ſeu nemo Geometriæ expers accedito: &
Xenocrates illa λαβὰς τῆς φιλοσοφίας, ſeu* anſas, *&* for-
mas *Philoſophiæ, ſeu unicum inſtrumentum nominavit. At
quid de Stagyrita noſtro eloquar? Hic quoque* Geometriæ
*lementa, & ἀκριβεστάτας ἐπιστήμας (d), & ἀκριβολογίαν (e)
dixit, hoc eſt exactam, peculiaremque edifferendi rationem,
ſuumque ſecutus magiſtrum* Platonem, *neminem adole-
ſcentum his deſtitutum præſidiis unquam fieri poſſe Philoſo-
phum exiſtimavit, poſteritatique hujuſcemodi ſcripta reliquit,
quæ nec legi quidem, niſi a Mathematico poſſunt. Profecto
jam quanti ad omnem inſtituendam juventutem, ſcientias
comparandas, rempublicamque formandam iſthæc valeant
Elementa, omnis vidit ætas, & experientia probavit: jam
vidit iſthæc aut inconſulta rerum indole, vel mentis uſu
poſthabito inanes verborum phaleras, aut fucati ſermonis præ-*

ſtigia

(a) Laert. in vita Pythag.
(b) Gell. lib. 1 cap. 9.
(c) Plato 7. de Republ.
(c) Ariſtot. II. de cœlo cap. 7.
(d) 1. Metaph.

ſtigia non adſectare; non lubricis inhærere conjecturis, non opinionum varietate jactari, nec ſophiſticis tricis, furtibuſque argutiis implicari. ſed firmo ratiocinio, demonſtrationibuſque ita incedere, ut ex ſimpliciſſimis quibuſque notionibus, ad ſublimem cognitionem ſtatim evehat, certa ab incertis ſecernat, & veritates ſimplici intuitu contempletur & quemadmodum animadvertente Tullio ex ſico vel minimo granulo, aut in vitis tenuiſſimo acino, vel ex ceterarum frugum, aut ſtirpium ſeminibus minutiſſimis immenſos truncos, ramoſque procreari cernimus, ita ex minimis hiſce, tenuibuſque Elementis immenſam ſcientiarum omnium comperimus exurgere molem? Quid ultra? Unum tantum supereſt, ut Nobis ætatique noſtræ, quæ hæc ſtudia non paucis ſæculis ante Galilæum tantiſper abligata, iterum excolenda in juventutis profectum ab orco revocavit, gratulemur magnopere, & nobis nunc permaxime eſt lætandum, quod hoc in almo Lyceo redierint in aurum tempora priſca. Quare nullum a labore nos recludit otium, urgent diem nox, & dies noctem; ut ad Mathematum perveniamus apicem; quibus jamjam apriores admovebimus manus ſcientiis, & mira non pauca ſuſpiciemus corpora nuſce creata. At ingenio ni viribus ſecundis cedat votis, improbus ſane labor nos juvabit. Vos interim, eruditiſſimi Viri, quibus ſumma ineſt ſapientia, & virtus ne gravemini in hiſce primis exercitiis rudem ignotumque noſtram audire vocem; ſed veſtro fauſto & plaudenti adſpectu imbecilles infirmoſque animos nobis maximis firmate ſecundis.

Digitized by Google

PLANORUM ELEMENTA

ORDINE NATURALI DIGESTA

GEometriæ a terræ dimenſione olim nuncupata (1), quod nomen eſt terræ menſura; quod etiam vero latius ejus natura patet. Eſt autem ea Matheſeos pars, quæ utpote cæterarum fundamentum, & baſis, quantitatem omnium generatim in longum, latum, & altum extenſam contemplatur. Hujuſmodi autem dimenſiones, non prout in re ſimul conjunctæ reperiuntur, ſed ut e mente ſeorſim concipi valent, conſiderat, & perinde quantitatem ipſam in lineas, ſuperficies, & ſolida digerit. Potiſſimum tamen ipſa, ut ait Proclus, in contemplatione verſatur figurarum, quæ aut lineis, aut ſuperficiebus concluduntur, & ſive in planis dumtaxat, ſive in ſolidis conſiſtunt; quare in *Planam*, & *Solidam*, ſeu, ut aiunt, in *Planimetriam*, & *Stereometriam* diſpeſcitur. Nobis igitur per hujuſmodi Exercitium de *Planis* tantum, quæ prioribus ſex libris complexus eſt Euclides, diſſerendum occurrit.

EX PRIMO ELEMENTORUM LIBRO

PROPOSITIONES

I. QUas in primo libro exhibet Euclides, propoſitiones numero ſunt quadraginta octo: quarum triginta quatuor ſunt theoremata, quibus rectilineorum affectiones demonſtrat, & quatuordecim ſunt problemata, quibus eorumdem conſtructiones exponit. Quare omnes pro rectilinearum figurarum doctrinæ complenda ſunt inſtitutæ, & ad tres claſſes facili negotio commode redigi poſſunt, quarum ad lineas rectas, ad triangula, & ad parallelogramma, ſive figuras quadrilateras, quæ lineis rectis, & parallelis continentur. Quemadmodum ergo theoremata, & problemata ſeorſim exponere lubet, ita ſecundum prolatas hasce claſſes ea digerere conabimur.

PRE-

(1) A terræ dimenſione Geometria dicta eſt, quaſi terræ menſura, vel ars ipſa terram dimetiendi a voce Græca γῆ, aut γέα *terra*, & μετρέω, ſive *metior*. Cauſam nominis probabilem, quod a terræ dimenſione ars hæc cœperit; uti ſcribit Cic. 4. Acad. [illegible] Strabo ad 1. Eclog. & Proclus, talis diſciplinæ inventa fuit, eo quod Nilus aquæ plus craſcens, confundebat terrarum poſſeſſiones, ad quas [illegible] Ægypti Philoſophi [illegible] agros diſſecuerunt.

PRIMI LIBRI THOREMATA

DE LINEIS RECTIS

I. Lineas rectas conſiderat Euclides vel ut ſibi mutuo occurrentes, & angulum conſtituentes; vel ut inter ſe parallelas & numquam convenientes. Circa primas quatuor occurrunt Euclidis theoremata, nimirum I. Ad eamdem rectam lineam, duabus eiſdem rectis lineis, non conſtituentur duæ aliæ rectæ lineæ æquales altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eamdem partem, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ terminos habentes (1). II. Quum recta linea inſiſtens ſuper alia recta linea angulos deinceps fecerit, eos vel rectos, vel duobus rectis æquales efficiet (2). III. Si ex puncto unius rectæ lineæ ducantur ad partes oppoſitas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ conſtituant cum illa angulos deinceps duobus rectis æquales, in directum erunt illæ duæ rectæ lineæ (3). IV. Si duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, anguli, quos ad verticem faciunt, inter ſe æquales erunt (4). Huic propoſitioni addi poteſt ejus converſa, quæ ſic exhibetur. Si ex puncto in recta linea dato ducantur hinc inde ad partes oppoſitas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ efficiant angulos ad verticem æquales, illæ duæ rectæ lineæ erunt in directum (5).

II. Circa theoriam parallelarum quinque ab Euclide demonſtrantur theoremata, nimirum I. Si in duas rectas lineas in eodem plano jacentes tertia incidat recta linea, & efficiat angulos alternos æquales, parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ (6). II. Si in duas rectas lineas in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat vel angulum exteriorem æqualem interiori, & oppoſito ad eamdem partem vel

(1) Prop. 7 lib. 1 Euclidis, teſte Proclo, [illegible] theorema hoc [illegible] [illegible] propoſitionis [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] extendi [illegible] [illegible] alium uſum apud Geometras habet.

(2) Prop. 13 lib. 1 Hoc theorema ab Euclide [illegible] [illegible], [illegible] Proclo [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] per illud & [illegible] modum, quo recta una ſuper altera inſiſtere debeat, nimirum [illegible] [illegible], ſed ad angulum [illegible] [illegible], quod angulus unus ſemper duobus rectis ſit minor, [illegible] [illegible] angulus, ſed una recta.

(3) Prop. 14 lib. 1 Hoc theorema Euclides [illegible] ad [illegible] præcedentem, & per abſurdum ſibique repugnans demonſtrat, converſa [illegible] theoremata per abſurda oſtendi debent, ut inquit Proclus.

(4) Prop. 15 lib. 1 Theorema iſtud, teſte Eudemo, a Thalete Mileſio fuit primum repertum, & ab Euclide deinceps demonſtratum, qua etiam demonſtratione [illegible] ſi plures rectæ ſeſe mutuo [illegible], eas efficere angulos ad ſectionem quatuor rectis æquales.

(5) Corollarium eſt 15. Propoſitionis.

(6) Prop. 27 lib. 1 In hoc theoremate Euclides alternos angulos appellat eos, qui neque ad eaſdem partes neque deinceps ſunt, ſed ab incidenti, quæ utrique [illegible] parallelas eſſe [illegible], & diſtinguit, quod alter ſurſum, alter deorſum poſitus.

vel duos angulos interiores ad eamdem partem poſitos duobus rectis æquales, parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ. Illæ duæ propoſitiones exhibent tres conditiones, quibus paralleliſmum rectarum dignoſcitur (1). III. Si in duas rectas lineas parallelas recta incidat recta linea, hæc efficiet & angulos alternos æquales, & angulum exteriorem æqualem interiori, & oppoſito ad eamdem partem, & duos angulos interiores ad eamdem partem poſitos duobus rectis æquales. Propoſitio iſta utramque præcedentem convertit, & proprietates parallelarum exponit (2). IV. Quæ eidem ſunt parallelæ, inter ſe ſunt parallelæ (3). V. Quæ æquales, & parallelas ad eaſdem partes conjungunt rectæ lineæ, inter ſe ſunt etiam æquales, & parallelæ (4).

DE TRIANGULIS.

IV. Conſiderat Euclides triangula & quoad ſe inſpecta, & inter ſe collata, hoc eſt demonſtrat proprietates cum abſolutas, tum relativas triangulorum. Quoad proprietates abſolutas inveſtigat illas, quæ ſunt omnium triangulorum communes, & illas, quæ ſunt quorumdam triangulorum peculiares: omnia iſthæc ſigillatim exponere conabimur.

DE TRIANGULIS QUOAD SE INSPECTIS, SIVE DE PROPRIETATIBUS ABSOLUTIS TRIANGULORUM CUM COMMUNIBUS, TUM PECULIARIBUS

V. Univerſales, & communes triangulorum proprietates quinque ſunt, quæ hiſce theorematis exhibentur. I. In omni triangulo, uno latere producto, exterior angulus eſt major alterutro interiore & oppoſito (5). II. Omnis trianguli duo anguli ſimul duobus rectis minores ſunt quomodocumque ſumti (6). III. Cujuſcumque trianguli

uno

(1) Prop. 27. lib. 1. Hoc theorema repertum fuit ab Euclide, tamen a Ptolemæo alia via demonſtratur, teſte Proclo.

(2) Prop. 29. lib. 1. Theorema iſtud Euclides, ut inquit Proclus, utrumque præcedentem convertit, quod enim in utroque illa eſt quæſitum, in hac poſitionem facit; & quæ in illis data ſunt, demonſtrare proponit.

(3) Prop. 30. lib. 1. Euclidis eſt hoc theorema: quo explicat reſpectum parallelarum: qui in omnibus non ſemper contingit, nam ea, quæ eidem ſunt dupla, inter ſe ſunt dupla, ut inquit Proclus.

(4) Prop. 33. lib. 1. Conſonum parallelarum eſt theorema iſtud: unde per ipſum parallelogrammorum ortus latenter tradit Euclides; parallelogrammum enim fit ab æqualibus, & parallelis.

(5) Ex lib. 1. prop. 16. cujus etiam auctor eſt Euclides.

(6) Ex lib. 1. prop. 17. eſt Euclidis, qui per hoc theorema, ut refert Proclus, indeterminate demonſtrat, duos quoſlibet trianguli angulos duobus rectis minores eſſe; at in propoſitione 32. determinabitur, quanto ſint minores, nempe reliquo trianguli angulo. Tres enim ipſius anguli duobus rectis æquales ſunt; quare duo tanto minores erunt duobus rectis, quantus eſt reliquus angulus.

uno latere producto, angulus exterior eſt æqualis duobus interioribus, & oppoſitis ſimul ſumtis; & anguli omnes ſimul duobus rectis ſunt æquales (1). IV. In omni triangulo duo latera ſimul majora ſunt reliquo quomodocumque ſumta (2). V. Si a terminis unius lateris trianguli ducantur intra triangulum duæ rectæ lineæ, eæ ſimul minores erunt duobus aliis lateribus trianguli, angulum vero majorem continebunt (3).

VI. Affectiones peculiares quorumdam triangulorum juxta Euclidem agnoſcuntur aut ex lateribus, aut ex angulis dati trianguli; quarum hæc quatuor theoremata exhibent, nimirum I. Iſoſcelium triangulorum anguli ad baſim ſunt inter ſe æquales, & productis æqualibus lateribus anguli infra baſim etiam inter ſe æquales erunt. Hinc venit triangula æquilatera eſſe etiam æquiangula (4). II. Si trianguli duo anguli æquales fuerint, & latera eos angulos ſubtendentia pariter æqualia erunt. Hæc propoſitio convertit antecedentem, & proinde colligere promtum eſt, triangulum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum (5). III. Omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit. Hinc eruere licet, triangulum ſcalenum, quod cuncta latera inæqualia habet, omnes etiam angulos habere pariter inæquales (6). IV. In omni viciſſim triangulo majori angulo majus latus opponitur. Hæc propoſitio eſt converſa præcedentis, & ex illa per contrarium patet, ſi omnes anguli trianguli ſint inæquales, triangulum eſſe ſcalenum (7).

VII. Hujuſmodi ſunt proprietates cujuslibet trianguli quoad latera reſpecti; quoad angulos vero Euclides in primo libro ſolum demonſtrat celebrem proprietatem trianguli rectanguli, demonſtraturus in 2. lib. affectiones trianguli obtuſanguli, & acutanguli: hoc enim per duo theoremata complet. I. In triangulis rectangulis quadratum quod fit

(1) Prop. 32 lib. 1. Hujus theorematis auctorem Pythagoram adſcribit Eudemus, ut Proclus tradit, qui etiam monet ex hoc theoremate judicari, quantum angulus exterior trianguli ſit major utroque interiori, & oppoſito [illegible] & quantum duo quilibet anguli trianguli duobus rectis ſint [illegible]. Unde hoc theorema complectitur duas propoſitiones 16 & 17. Et ex hoc etiam aperitur via ad deprehendendam omnium rectilinearum [illegible] anguli quibus [illegible] ſint æquales [illegible] enim figuras rectilineas in triangula reſolvimus.

(2) Prop. 20 lib. 1. Hoc theorema ab Euclide adinventum fuiſſe ait Proclus; Epicurei vero hoc [illegible], & ipſi [illegible] manifeſtum eſſe dixerunt, ut probatione non egeat [illegible]; quidem, illud, quamvis ſenſu notum, ſcientificam tamen [illegible] poſſe, niſi demonſtratione fuiſſet [illegible].

(3) Ex lib. 1 prop. 21. Euclid.

(4) Prop. 5 lib. 1. Thales Mileſius hoc theorema adinvenit, teſte Proclo, ac primus animadvertit, omnis iſoſcelis angulos ad baſim eſſe æquales, & more antiquorum ſimiles appellavit.

(5) Ex lib. 1 prop. 6. Euclides hoc theoremate convertit præcedentem, ut ſtatueret, in triangulo quolibet latera, & angulos inter ſibi invicem reſpondere.

(6) Ex Lib. 1 prop. 18. Euclidis.

(7) Ex Lib. 1 prop. 19. Euclidis, quæ convertit præcedentem ad oſtendendum, in triangulis & latera & angulos æque, parique [illegible] gradu.

ſit ex latere rectum angulum ſubtendente (quod græce dicitur *hypotenuſa*) æquale eſt quadratis laterum rectum angulum continentium (quæ græce *catheta* nuncupantur) (1). II. Si quadratum ex uno latere trianguli æquale ſit quadratis, quæ ex aliis lateribus fiunt, angulus ſub his lateribus contentus, rectus erit (2).

DE TRIANGULIS INVICEM COLLATIS, HOC EST DE PROPRIETATIBUS RELATIVIS EORUMDEM.

VIII. Comparat Euclides triangula inter ſe ad inferendam eorumdem aut æqualitatem, aut inæqualitatem, aut tantummodo aliquorum æqualitatem quoad aream, ſive ſpatium. Ejus theoremata, quibus haſce triangulorum relativas proprietates demonſtrat, ſunt quinque, videlicet. I. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, & angulos ſub iis lateribus contentos æquales, habebunt & baſim baſi æqualem: erit triangulum æquale triangulo: eruntque reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur (3). II. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, & baſim baſi æqualem, & angulos ſub æqualibus lateribus contentos pariter æquales habebunt: hæc propoſitio convertit quartam (4). III. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, & angulum ſub iis lateribus contentum angulo majorem, & baſim baſi majorem pariter habebunt (5). IV. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, & baſim baſi majorem, habebunt & angulum ſub iis lateribus contentum angulo majorem: hoc theorema eſt converſum præcedentis (6). V. Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales alterum alteri, & unum latus uni lateri

(1) Prop. 47. lib. 1. Theorema illud, teſte Laertio, & Proclo, Pythagoram auctorem habet, qui, ut ex Apollodoro apud eumdem Laertium, ob ejus inventionem ſua lætitia ſuit adductus, ut Hecatomben, hoc eſt, ſacrificium centum boum Diis immolaverit.

(2) Prop. 48. lib. 1. Pythagoræ etiam adſcribitur theorema illud, quod præcedenti ex toto convertitur.

(3) Prop. 4. lib. 1. Hoc theorema Euclides aperit, qui in eo demonſtrando utitur ſuperimpoſitione, quæ maximo uſui eſt apud Mathematicos; & Archimedes eam uſurpavit non ſolum in libro de centro gravitatis planorum, ſed etiam in ſolidis, ut de Conoidibus, & de Sphæroidibus, &c.

(4) Prop. 8. lib. 1. quæ ad Euclidem refertur.

(5) Prop. 24. lib. 1. Hanc propoſitionem Euclides appoſuit quartæ. Per illam enim angulos, qui ſunt ad vertices triangulorum æquales ponit, per hanc vero inæquales; per illam baſim æqualem demonſtrat, per hanc inæqualem.

(6) Prop. 25. lib. 1. Per ſolum theorema Euclides ipſe & oppoſitum octavæ propoſitionis demonſtrat, & præcedentem convertit: quæ diverſo modo ab aliis demonſtratur, ut tradit Proclus.

Google

æquale, ſive quod æqualibus adjacet angulis, ſive quod uni æqualium angulorum opponitur, omnia reliqua etiam æqualia habebunt: hæc propoſitio quoad primam partem convertit quartam (1). His propoſitionibus nova alia addi poteſt, quæ complet perfectam æqualitatem triangulorum, eſtque ſequens: Si duo triangula habeant unum angulum uni angulo æqualem, & circa reliquos angulos duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquos angulos ejuſdem ſpeciei, hoc eſt, vel utrumque acutum, vel utrumque obtuſum, &c. omnia reliqua æqualia habebunt.

IX. Theoremata, ex quibus Euclides deducit æqualitatem areæ, ſive ſpatii triangulorum ſunt quatuor ſequentia, videlicet: I. Triangula in eadem baſi, & in iiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia (2). II. Triangula in æqualibus baſibus, & in iiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia (3). Ambæ, quæ ſequuntur, ſunt propoſitionum illarum converſæ. III. Triangula æqualia in eadem baſi, & ad eamdem partem conſtituta, ſunt etiam in eiſdem parallelis (4). Triangula in æqualibus baſibus, ac in directum jacentibus, ad eamdem partem conſtituta, ſunt etiam in iiſdem parallelis (5).

DE PARALLELOGRAMMIS.

X. De parallelogrammis etiam Euclides demonſtrat cum affectiones abſolutas, tum eorumdem affectiones relativas. Proprietates abſolutas hæc duo theoremata oſtendunt. I. Parallelogrammorum ſpatiorum latera, quæ ex adverſo ſunt, inter ſe ſunt æqualia: ſimiliter & oppoſiti anguli: diagonalis vero ea biſariam dividit (6). II. Parallelogrammorum ſpatiorum eorum, quæ circa diametrum ſunt complementa, inter ſe ſunt æqualia (7).

XI. Affectiones parallelogrammorum relativas illas dicimus, quæ ipſa ſpectant tam inter ſe, quam cum triangulis collata: quas hæc tria Euclidis theoremata demonſtrant. I. Parallelogramma in eadem

(1) Prop. 26 lib. 1. Theorema iſtud ad Thaletem Mileſium referri aſſeverat, ut Proclus ex Eudemo ſcribit. Hic autem Euclides docet conſtare æqualitatem & inæqualitatem triangulorum clare dicit, & ad parallelas, & parallelogramma pertranſit.

(2) Ex lib. 1 prop. 37. Euclidis.

(3) Ex lib. 1 prop. 38. Euclidis.

(4) Ex lib. 1 prop. 39. Euclidis, quæ convertit 37.

(5) Ex lib. 1 prop. 40. Euclidis, quæ convertit 38.

(6) Ex lib. 1 prop. 34. Euclidis. Quam hic de parallelogrammis demonſtrat, tertia affectio circulo quoque convenit, & ellipſi.

(7) Ex 1 lib. prop. 43. Euclidis. Veritas tamen hujus theorematis conſtat ex poſitione eorum quæ ſunt circa diametrum, ſive complementa fiant ſi in puncto tangente vel ſecante, vel in diſtinguente. Eadem tamen ſemper conſtare demonſtratio, quamquam non ſemper quadrilatera ſint ſupplementa, ut docet Commandinus.

dem baſi, & in iiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia (1). XI. Parallelogramma in æqualibus baſibus, & in iiſdem parallelis conſtituta, ſunt etiam inter ſe æqualia (2). Si parallelogrammum, & triangulum habeant eandem baſim, & ſint inter eaſdem parallelas conſtituta, erit parallelogrammum duplum trianguli (3).

PROBLEMATA PRIMI LIBRI.

XII. Hujus primi libri problemata inſtituit Euclides ad exponendum ortus, & conſtructiones rectilineorum quoque figurarum: quare ipſa ad quatuor claſſes commode revocari poſſunt, nimirum & ad rectas lineas quoad communem praxim, tum perpendiculares, tum parallelas, & ad angulos, & ad triangula, & ad parallelogramma tandem ſive quoad ſe inſpecta, ſive inter ſe collata; ſecundum has igitur claſſes ea hic proponere placet.

XIII. Praxis communis rectarum per hæc tria Euclidis problemata indicatur. I. Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere (4). II. Datis duabus rectis lineis inæqualibus, de majore minori portionem æqualem abſcindere (5). III. Datam rectam lineam terminatam biſariam dividere (6).

XIV.

(1) Ex lib. 1. prop. 35. Euclidis: qui per hoc, & quæ ſequuntur theoremata, parallelogramma utcumque dilatata expoſuit. Hæc theoremata, ut Federicus Commandinus ex Proclo inquit, ex eorum numero ſunt, quæ in mathematicis diſciplinis παράδοξα appellantur. Semper enim vulgus ſtatim cum videt longitudine multiplicata, ſpatiorum æqualitatem non deſinit & tamen, eadem exiſtente baſi, quantum parallelæ producuntur, tantum parallelogrammorum quoque longitudinem augeri.

(2) Ex lib. 1. prop. 36. Euclidis. In præcedenti theoremate Euclides eaſdem baſes accepit, hic vero æquales: id autem commune utrique parallelogrammis poſuit, inter eaſdem eſſe parallelas. Hoc theorema per baſes ſi præcedentis demonſtravit Euclides, attamen, ut inquit Proclus, a Theone demonſtratum fuit ad univerſaliorem redacta formam, ut omnibus caſibus congruere videatur.

(3) Ex lib. 1. prop. 41. Euclidis. Hujus theorematis demonſtratio univerſalis, ſi parallelogrammum, & triangulum habeant æquales baſes; nam cum triangula in baſibus æqualibus ſint æqualia, parallelogrammum, quod alterius eſt duplum, reliqui quoque duplum erit.

(4) Ex lib. 1. prop. 2. Euclidis, qui in ipſa dedit quodlibet punctum ſola poſitione, hoc enim tantum poſito dari poteſt, non autem datur ſpatio, & magnitudine. Sumſit quoque poſitum datum extra rectam datam, vel poſſit eſſe & in eadem recta, & in ipſius rectæ extremitate; in quo caſu eadem fieret demonſtratio, licet diverſa conſtructio.

(5) Ex lib. 1. prop. 3. Euclidis.

(6) Ex lib. 1. prop. 10. Euclidis, qui rectam terminatam ponit, ſiquidem ex utraque parte infinitam rectam biſariam dividere non poſſumus, infinitam vero ex altera parte tantum, ubicumque punctum accipiatur, inæqualis ſemper fit ſectio. Apollonius Pergæus rectam lineam terminatam diverſo pacto ab Euclide biſariam ſecare docuit, nempe duorum circulorum ad modum primæ propoſitionis, utrumque in [illegible] conſule Commandinum.

XIV. Quoad rectas perpendiculares, & parallelas hæc tria apud Euclidem exſtant problemata. I. Ex puncto in recta linea dato perpendicularem rectam lineam excitare (1). II. Super rectam infinitam ex puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam demittere (2). III. Per datum punctum, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere (3).

XV. Praxim deinceps angulorum, quæ ipſos ſive quoad ſe inſpectos, ſive inter ſe collatos ſpectat, hæc duo nos docent problemata. I. Datum angulum rectilineum bifariam ſecare (4). II. Ad datam rectam lineam, atque ad datum in ea punctum, angulum dato angulo rectilineo æqualem conſtituere (5).

XVI. Triangula itidem per hæc duo problemata conſtruuntur. I. In data recta linea terminata triangulum æquilaterum conſtituere (6). II. Ex tribus rectis, quæ tribus aliis datis ſint æquales, triangulum conſtituere, oportet autem, ut ex tribus datis duæ ſimul reliqua majores ſint, quomodocunque ſumtæ (7).

XVII. Tandem problemata, quæ ad parallelogramma etiam conſtruenda attinent, ſunt hæc quatuor. I. In data recta linea terminata quadratum conſtituere (8). II. Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in angulo rectilineo dato (9). III. Ad datam rectam lineam,

(1) Ex lib. 1. prop. 11. Euclidis, qui punctum in medio lineæ deſignat; etſi ſumi etiam poſſit in altera ejus extremitati; quo in caſu eadem efficienda ſi ſit extremitas, recta lineam producit.

(2) Prop. 12. lib. 1. Hoc problema, ut refert Proclus, Oenopides primus inveſtigavit, utile ipſum ad Aſtrologiam exiſtimans. & datur in ea recta infinita, cum punctum extra ipſam ſumitur, ne cum finita dicta confundatur.

(3) Prop. 31. lib. 1. quæ eſt Euclidis, qui per tale problema artem parallelam videtur tradere.

(4) Ex lib. 1. prop. 9. Euclidis. Ex hoc problemate angulus duntaxat rectilineus ſecari valet; quia aliorum ſectio ad elementarem inſtitutionem non attinet. angulus autem rectilineus hinc etiam ſecari poteſt in quatuor angulos æquales, in octo, in ſexdecim & ſemper procedendo per augmentum duplex; uſquequo omnis pars biſectionis ſemper biſariam ſecari poterit in quamlibet vero aliam inæqualium partium non ſecare præſentem conſtructionem tranſgreditur.

(5) Prop. 23. lib. 1. Hoc problema ab Oenopide inventum fuiſſe tradit Eudemus.

(6) Ex lib. 1. prop. 1. Quæ eſt Euclidis, qui eſt ſolum in ipſa modum tenentibus, qua in data recta triangulum æquilaterum valeat conſtituere; poteſt tamen in ipſa recta terminata & triangulum iſoſceles, ſi accipiatur ipſa recta vel æque major, vel æque minor, & triangulum ſcalenum, ſi una ex punctis in quo illi duo circuli ſe ſecant, ſed ex alio ſeu intra, ſeu infra circulorum circumferentiarum quomodolibet deſignato rectæ ducantur, ſic enim tria latera trianguli inæqualia erunt.

(7) Prop. 22. lib. 1. Hoc problema eſt Euclidis, alterum ejus demonſtratio a Theone fuit immutata, ut animadvertit Proclus.

(8) Prop. 46. lib. 1. Problema iſtud Euclidis proprium; & præcipue deſervit conſtructioni propoſitionis 47. lib. 1. & ad totam elementorum ſeriem.

(9) Ex lib. 1. prop. 42. Euclidis.

ogle

lineam, dato triangulo, æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo (1). III Dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo (2).

EX SECUNDO ELEMENTORUM LIBRO.

I PEr quatuordecim propoſitiones, quarum duodecim ſunt theoremata, & duo tantum problemata, diſſerit in hoc ſecundo libro Euclides de Potentiis rectarum, hoc eſt de quadratis, atque rectangulis omnibus, quæ ex ipſis rectis, ſive ex earumdem partibus efformantur. Eorum doctrinam eo potiſſimum momento proſequitur, ut proprietates trianguli tum obtuſanguli, tum acutanguli, quas adjicere debuerat ad propoſitionem quadrageſimam ſeptimam libri primi, commode demonſtrare poſſit. Has igitur propoſitiones eodem ſuperius ſtatuto ordine proferemus.

THEOREMATA SECUNDI LIBRI.

II QUæ tradit in hoc ſecundo libro theoremata Euclides, ad duas claſſes recta methodo redigi valent, videlicet ad variam rectangulorum comparationem, quæ ex diverſa rectarum ſectione oriuntur; & ad proprietates trianguli cum obtuſanguli, tum acutanguli. Secundum igitur has claſſes illa omnia proferenda ducimus.

DE RECTANGULIS, QUÆ EX VARIA RECTARUM SECTIONE ORIUNTUR.

III PRimum hujus libri theorema tamquam fundamentum ceterorum propoſuit Euclides, quodque, licet ipſe demonſtret, poteſt tamen veluti axioma accipi, & facili negotio deſcendit ex ſecunda parte octavi axiomatis libri primi, quo profertur, totum omnibus ſuis

[1] Prop. 44. lib. 1. Antiqua ſunt, ut ait Eudemus, Pythagoreorum inventa iſtiuſmodi ſpatiorum applicationes, exceſſus, & defectus. Nam cum ipſi propoſita recta, datum ſpatium toti rectæ congruere viderent, tunc ſpatium illud ipſi applicari dixerunt; cum vero ſpatii longitudinem ipſa recta majorem efficerent, tunc excedere; cum eandem minorem, tunc deficere. Euclides autem ſic in problemate applicationem parallelogrammi ad rectam tantummodo retulit, alteram deinde exceſſus & defectus cum in ſecundo, tum in ſexto elemento, ut Proclus animadvertit.

[2] Prop. 45. lib. 1. Problema illud etiam eſt Euclidis, teſte Proclo, qui per hoc problema doctrinam, quam in duobus præcedentibus tradiderat de conſtitutione, & applicatione æqualium dato triangulo parallelogrammorum, univerſaliorem reddit, applicationem ad quodlibet rectilineum extendens.

Google

ſuis partibus ſimul ſumtis æquale eſſe, ex quo omnes veluti hujus libri propoſitiones clariſſime deſcendunt, quandoquidem primum heic conſiderat Euclides lineas ſectas, & inſectas, atque rectangula, quæ ex ipſis egrediuntur, invicem confert: deinceps comparat quoque rectangula, & quadrata, quæ oriuntur ex recta aut ſecta utcumque, aut ſecta in partes æquales, & inæquales, aut tandem ſecta in partes æquales, & utcumque protenſa per aliam rectam ei adjectam. Secundum igitur hunc ordinem decem prima theoremata proferamus.

IV. Circa rectas ſectas, & inſectas hoc unicum adeſt theorema. Si fuerint duæ rectæ lineæ, una quidem ſecta in quotcumque partes, altera vero inſecta, rectangulum, quod fit ex tota, & inſecta, æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex partibus totius, & eadem inſecta (1).

V. Quoad rectas ſectas utcumque quinque alia ſequuntur theoremata, quæ ex primo quoque deſcendunt, & ſunt. I. Si recta linea ſecta fuerit utcumque, quadratum quod fit a tota, æquale erit rectangulis, quæ fiunt a tota, & partibus (2). II. Si recta linea ſecetur utcumque, rectangulum ex tota, & parte una, æquale erit rectangulo ſub partibus, una cum quadrato, quod fit ex parte prædicta (3). III. Si recta linea ſecetur utcumque, quadratum quod fit a tota, æquale erit quadratis partium una cum rectangulo bis ſub partibus contento (4). Ex hujus theorematis demonſtratione duo deſcendunt: primum, parallelogramma circa diagonalem quadrati eſſe quoque quadrata: ſecundum, quod ſi recta ſecetur in partes æquales, quadratum totius erit quadruplum quadrati dimidiæ. IV. Si recta linea ſecetur utcumque, quadrata, quæ fiunt ex tota & parte una, æqualia ſimul erunt rectangulo bis contento ſub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius (5). V. Si recta linea ſecetur utcumque, quadratum quod fit a tota, & parte una, veluti ex unica linea, æquale erit rectangulo quater contento ſub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius (6).

(1) Prop. 1. lib. 2. Non ſolum hoc theorema, verum & omnes ſecundi elementi propoſitiones judicio nonnullorum Euclidi adſcribuntur, qui nos omnes [illegible] ad demonſtrandas tum obtuſanguli, tum acutianguli proprietates, ob quas totum ſecundum conſcripſit librum. Hujuſmodi autem propoſitiones fere omnes demonſtrantur axiomate iſto: *Totum eſt ſuis partibus ſimul ſumtis æquale*. Decem priora hujus elementi theoremata, quæ ſpectant rectangula, & quadrata in lineis [illegible] vera etiam in numeris reperiuntur, quoties numeri, ut lineæ, dividuntur in partes: nimirum rectangula quoque numerica ex multiplicatione duorum numerorum proveniunt, & quadrata numerica ex multiplicatione numeri per ſe ipſum, unde in numeris idem valet, quod in lineis.

Ex hoc quoque theoremate perſpicue conſtat, in quadratis ſpatia parallelogramma circa diametrum quadrata eſſe.

[2] Prop. 2. lib. 2.

[3] Prop. 3. lib. 2. Hoc, & duo præcedentia theoremata demonſtrandæ multiplicationi [illegible] deſerviunt.

[4] Prop. 4. lib. 2. Hoc theorema radicum quadratarum extractioni non parum confert.

[5] Prop. 7. lib. 2.

[6] Prop. 8. lib. 2.

VI

VI De rectis ſectis in partes æquales, & inæquales hæc duo theoremata demonſtrat Euclides. I. Si recta linea ſecetur bifariam, & non bifariam, erit rectangulum ex partibus inæqualibus una cum quadrato portionis, quæ inter utramque ſectionem interjicitur, æquale ei, quod a dimidia deſcribitur, quadrato (1). II. Si recta linea ſecetur bifariam, & non bifariam, quadrata partium inæqualium dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & portione inter utramque ſectionem interjecta (2).

VII Tandem de linea ſecta in partes æquales, & producta per adjectionem alterius hæc duo alia exhibet Euclides theoremata. I. Si recta linea ſecetur bifariam, eique alia in directum adjungatur, erit rectangulum, quod fit ex tota, & adjecta veluti ex unica linea in ipſam adjectam, una cum quadrato dimidiæ, æquale quadrato, quod fit ex dimidia, & adjecta, ſimiliter tamquam ex unica linea (3). II. Si recta linea ſecetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur, quadrata duo, unum ex tota, & adjecta veluti ex una linea, alterum ex ipſa adjecta, dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & ex, quæ componitur ex dimidia, & adjecta (4).

DE QUADRATIS LATERUM TRIANGULI OBTUSANGULI, ET ACUTANGULI.

VIII IN propoſitione 47 lib. 1. invicem comparavit Euclides quadrata, quæ fiunt ex lateribus trianguli rectanguli: heic autem perſequitur etiam quadrata, quæ fiunt ex lateribus trianguli cum obtuſanguli, tum acutanguli, et poſita jam de potentiis rectarum doctrina, quæ omnino præmittenda erat, hæc ſequentia duo tradit theoremata. I. In triangulis obtuſangulis quadratum, quod fit ex latere obtuſum angulum ſubtendente, majus eſt quadratis, quæ fiunt ex lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo bis contento ſub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum obtuſum adjungit ei perpendicularis ex oppoſito angulo demiſſa (5). II. In triangulis acutangulis quadratum, quod fit ex latere acutum angulum ſubtendente, minus eſt quadratis, quæ fiunt ex lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo bis contento ſub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum acutum abſcindit ex eo perpendicularis ex oppoſito angu-

[1] Prop. 5. lib. 2. Theorema iſtud cum tribus, quæ ſequuntur, ad Algebram multum conducit.

[2] Prop. 9. lib. 2. Quæ cum reliquis, quæ ſequuntur, Trigonometriæ planæ deſerviunt.

[3] Prop. 6. lib. 2.

[4] Prop. 10. lib. 2.

[5] Prop. 12. lib. 2. Ad hanc, & ſequentem propoſitionem totum dirigitur ſecundum ab Euclide elementum, & per hæc duo theoremata demonſtrat ipſe proprietates aliæ triangulorum, quas in primo libro reliquerat.

angulo demiſſa. Ex hoc theoremate tale exiſtit corollarium: In omni parallelogrammo quadrata diagonalium æqualia ſunt quadratis laterum (1).

SECUNDI LIBRI PROBLEMATA.

IX. DUo tantum ſunt ejuſmodi ſecundi libri problemata, quorum unum potentias rectarum ſpectat, alterum rectilineorum æqualitatem. I. Datam rectam lineam ſic ſecare dividere, ut rectangulum, quod ſit ex tota, & parte una, æquale ſit quadrato partis alterius (2). II. Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere (3). Ex problematis hujus demonſtratione duo eliciuntur corollaria. I. Si ex puncto aliquo in circuli circumferentia ſumto, perpendicularis ad diametrum demittatur, quadratum talis perpendicularis æquale erit rectangulo ſub diametri ſegmentis comprehenſo. II. Si quadratum, quod ſit perpendiculari erecta ſuper diametro circuli, æquale ſit rectangulo, quod ſit ex ſegmentis, circuli circumferentia tranſibit per extremitatem perpendicularis.

EX TERTIO ELEMENTORUM LIBRO PROPOSITIONES.

I. QUamquam Euclides in tertio Elementorum Libro unam tantum contemplatur figuram, circulum nempe, non paucæ tamen ſunt affectiones, & conſtructiones, quas de hujuſmodi figura demonſtrat. Plurimis enim ſive in circulo, ſive ad circulum ductas rectas lineas inter ſe comparat, circulos etiam & ſe ſe mutuo interſecantes, & vel ſeſe invicem, vel rectas ipſas tangentes conſiderat, centra circulorum, & portionem determinat, anguloſque tandem, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias conſiſtunt, ſeſe inter comparat; quare numero hoc libro propoſitiones triginta ſeptem occurrunt, quarum una & triginta theo-

[1] Prop. 13. lib. 2. Quamquam Euclides in defin. trilateris lib. 1. acutangulum triangulum appellavit illud, quod omnes acutos habeat angulos: hoc tamen loco in triangulo appellat acutangulo, propterea quod omnes habeant ſaltem unum angulum acutum; unde propoſitio hæc pacto exponitur quoad ſenſum. Quod in triangulo latus, quod acutum ſubtendit angulum, minus poteſt eſſe quam latera acutum angulum continentia: quod & de triangulo rectangulo & de obtuſangulo quoque valet quoad latus oppoſitum angulo acuto.

[2] Prop. 11. lib. 2. Hoc problema ſoli geometriæ accidit particulari; non autem numeris: nullus enim numerus ita ſecari poteſt, ut productum ex toto in partem unam, æquale ſit quadrato partis reliquæ. Hoc idem problema demonſtrat Euclides in ſexto libro, ubi diverſo modo illud exhibet, dicens: Datam rectam terminatam, extrema, & media ratione ſecare: hinc veteres geometræ de proportione nihil palam tradiderunt, non dixit rectam medii, ac extrema ratione ſecare.

[3] Prop. 14. lib. 2.

theoremata ſunt, & ſex alia problemata; iſta per determinatas claſſes proſequere debito ordine curabimus.

TERTII LIBRI THEOREMATA.

II. AD quatuor claſſes hujus libri theoremata commode rediguntur. Ad primam nempe, quæ ſpectat circulorum centra: ad ſecundam, quæ colligit rectas ad circuli circumferentiam ductas: ad tertiam, quæ ſive circulos ſeſe invicem occurrentes comprehendit, ſive rectas, quæ circulum ipſum tangunt: ad quartam demum, quæ angulos ſive ad centra, ſive ad circumferentias circulorum conſtitutos, concludit.

DE CIRCULORUM CENTRIS.

III. CEntra circulorum per quatuor theoremata inveſtigantur. I. Si in circulo recta quædam linea ſecet aliam rectam lineam biſariam, & ad angulos rectos, in ſecante erit centrum circuli (1). II. Si recta linea per centrum ducta, aliam rectam lineam non ductam per centrum biſariam ſecet, ſecabit ad angulos rectos: & ſi ſecet ad angulos rectos, ſecabit biſariam. Perinde infertur quoque, rectam in circulo ductam ſecantem aliam aut ad angulos rectos, aut biſariam, in ſe centrum circuli continere (2). III. In circulo ſi duæ rectæ lineæ ſeſe in centro non ſecent, utraque biſariam non ſecabitur (3). IV. Si e puncto intra circulum ſumto, cadant ad ejus circumferentiam plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, aſſumtum punctum erit centrum circuli (4).

DE RECTIS AD CIRCULI CIRCUMFERENTIAM DUCTIS.

IV. CIrca rectas ad circuli circumferentiam ductas ſex ab Euclide demonſtrantur theoremata, nimirum. I. Si in circuli circumferentia duo puncta ſumantur, quæ puncta illa conjungit recta linea, tota intra circulum cadet (5). II. Si in circuli diametro capiatur punctum aliquod, quod non ſit centrum, & ex eo ducantur ad cir-

[1] Coroll. propoſ. 1. lib. 3. Propoſitiones cunctas hujus tertii elementi ab Euclide acceptas ſervat omnes.

[2] Prop. 3. lib. 3. Si hoc theorema Euclides latenter indicat, cum in circulo recta una aliam non ductam per centrum ſecuerit, tum etiam, & rectam ſecantem tranſire per circuli centrum, & aliam ſecare & biſariam & etiam ad angulos rectos, quorum uno dato, aliud evincitur.

[3] Prop. 4. lib. 3.

[4] Prop. 9. lib. 3.

[5] Prop. 2. lib. 3. qui ſuadeat quoque Euclides, rectam quamlibet circulum tangentem in unico tantum puncto periferiam occurrere, aliaquin caderet intra circulum, & non eſſet tangens, ſed ſecans.

cumferentiam plures aliæ rectæ lineæ, earum omnium maxima quidem erit illa, quæ tranſit per centrum, minima vero reliqua portio diametri; aliarum autem, quæ maximæ propinquiores ſunt, majores erunt ſemper remotioribus: & ab illo eodem puncto non niſi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt (1). III Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ex quo ducantur plures rectæ lineæ cum ad concavam, tum ad convexam circuli circumferentiam, earum utique, quæ pertingunt ad concavam, maxima quidem erit illa, quæ tranſit per centrum; aliarum vero, quæ maximæ ſunt propinquiores, majores erunt ſemper remotioribus: viciſſim autem illarum, quæ pertingunt ad convexam, minima quidem erit illa, quæ producta tranſit per centrum; aliarum vero, quæ minimæ ſunt propinquiores, minores erunt ſemper remotioribus: & ab illo eodem puncto tum ad concavam, tum ad convexam circuli circumferentiam non niſi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt (2). IV In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro diſtant; & quæ æqualiter a centro diſtant, inter ſe ſunt æquales (3). V In circulo maxima linearum in ipſo ductarum eſt diameter, ſeu quæ tranſit per centrum; aliarum autem, quæ centro ſunt propinquiores, majores ſemper erunt remotioribus (4). VI Si in circulo duæ rectæ lineæ ſibi mutuo ſecent, erit rectangulum ſub ſegmentis unius æquale rectangulo ſub ſegmentis alterius (5). Quæ proprietas obtinet etiam, ſi duæ rectæ in circulo ductæ ſibi invicem extra circulum occurrant.

DE ANGULIS SIVE AD CENTRA, SIVE AD CIRCUMFERENTIAS CIRCULORUM CONSTITUTIS, ET DE CIRCULORUM PORTIONIBUS.

7. QUod circulos ſibi invicem occurrentes ſex alia extant apud Euclidem theoremata. I Circuli, qui ſe mutuo ſecant, non poſſunt unum idemque centrum habere (6). II Circuli, qui ſibi intus contingunt, non poſſunt unum idemque centrum habere (7). III. Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non ſecat (8). IV Si duo circuli ſibi intus contingant, recta conjungens centra ipſorum tranſibit per punctum contactus (9). V Si duo circuli ſeſe extra contingant, recta conjungens centra ipſorum, tranſibit per punctum contactus (10). VI Circulus circulum in pluribus,

quam

(1) Prop. 7 lib. 3 Ex hac propoſitione colligitur, ſolum ex centro duas poſſe ad circumferentiam rectas lineas æquales duci: nam ex alio quolibet puncto non niſi duæ æquales ducuntur.
(2) Prop. 8. lib. 3
(3) Prop. 14. lib. 3.
(4) Prop. 15. lib. 3.
(5) Prop. 35 lib. 3.
(6) Prop. 5 lib. 3
(7) Prop. 6 lib. 3
(8) Prop. 10. lib. 3
(9) Prop. 11. lib. 3.
(10) Prop. 12. lib. 3.

quam in uno puncto non contingit ſive intra, ſive extra eum contingat (1).

VI. Quoad rectas circulum tangentes tria ſolum demonſtrantur theoremata. I. Si ex extremitate diametri perpendicularis ad eam erigatur, hæc tota cadet extra circulum, & in locum ipſa, & circuli circumferentia contentum, nulla alia recta linea duci poterit. Perinde facile ducetur tangens ad punctum in circuli circumferentia datum, ſi ex tali puncto ducatur diameter ad circulum, & ex eodem puncto erigatur perpendicularis ad diametrum (2). II. Si circulum recta contingat linea, quæ centrum cum puncto contactus conjungit, perpendicularis erit ad tangentem (3). III. Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus perpendicularis ad tangentem erigatur, hæc tranſibit per centrum circuli (4).

VII. Tandem quoad rectas, quæ ex eodem puncto ductæ circulum & tangunt, & ſecant, theoremata duo ſunt. I. Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum contingat, altera eumdem utcumque ſecet, rectangulum ſub ſecante tota, & portione extra circulum exiſtente contentum, æquale erit quadrato, quod fit ex tangente (5). II. Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum ſecet, altera incidat in eum, ſitque rectangulum

[1] Prop. 13 lib. 3.

[2] Prop. 16 lib. 3. Per hoc theorema non quoque Euclides docet & rectam lineam, quæ ab extremitate diametri ducitur, circulum contingere, illamque tangere in uno tantum puncto, alias intra ipſum caderet: & angulum contactus, hoc eſt a tangente & circuli peripheria contentum, minorem eſſe quocumque angulo recti lineo acuto: & angulum ſemicirculi, hoc eſt diametro & circuli peripheria comprehenſum, quocumque angulo acuto recti lineo eſſe majorem, etenim in locum tangente, & circuli circumferentia contentum, nulla alia recta ex puncto contactus duci poteſt.

Neque tamen negetur angulum contactus nulla prorſus quantitate gaudere: quia licet tam minor ſit quocumque angulo acuto, ut per nullam rectam minui poſſit, poteſt tamen augeri, & alio circuli neque per rectam lineam infiniteſimum angulum rectilineum primi capientem, minui tamen poteſt per alias rectas diſcedentes hunc angulum infiniteſimum, nempe per aliam circuli circumferentiam deſcriptam per punctum contactus, & majore intervallo, quam ſit circuli contenti: etenim nomine quantitatis apud Mathematicos id omne intelligitur, quod plus, minuſque ſuſcipere, quocumque modo augeri poteſt, aut minui.

[3] Prop. 18 lib. 3.

[4] Prop. 19 lib. 3, ex quo colligitur: ſi intra circulum aliqua ponatur recta, atque ex uno ejus extremo alia extra circulum ducatur, tria quoque poſſe. I. Rectam lineam intra circulum poſitam eſſe diametrum, ſeu per centrum tranſire. II. Ductam extra exiſtens eſſe tangentem. III. Unam alteri ad angulos rectos inſiſtere: quorum ſi duo contingant, tertium neceſſario eveniet.

[5] Prop. 36 lib. 3. Hoc theorema duo nos docet. I. Si ab eodem extra circulum puncto quotvis ducantur ſecantes, omnia rectangula illa ſibi æqualia eſſe; etenim ſingula quadrato tangentis æquantur. II. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt æquales eſſe: earum quippe quadrata ſingula eidem æquantur quadrato ex Commandino.

gulum ſub ſecante tota, & portione extra circulum exiſtente contentum æquale quadrato incidentis, incidens iſta recta linea tangens erit (1).

DE ANGULIS SIVE AD CENTRA, SIVE AD CIRCUMFERENTIAS CIRCULORUM CONSTITUTIS, ET DE CIRCULORUM PORTIONIBUS

VIII. QUæ exponunt affectiones angulorum, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias circulorum conſiſtunt, theoremata, ſeptem numerantur, nimirum. I Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad circumferentiam, cum ſuper eodem arcu inſiſtunt (2). II Qui in eadem portione ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales (3). III Quadrilaterorum in circulo inſcriptorum anguli oppoſiti duobus rectis ſunt æquales (4). IV In circulis æqualibus æquales anguli, æqualibus arcubus inſiſtunt ſive ad centra, ſive ad circumferentias ſint poſiti (5). V In circulis æqualibus anguli, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias poſiti, æqualibus arcubus inſiſtunt, ſunt etiam æquales inter ſe (6). VI. Angulus in ſemicirculo rectus eſt: qui vero eſt in portione majore eſt recto minor: & qui in portione minore eſt recto major (7). VII Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus alia utrumque circulum ſecans ducatur, anguli ſub tangente & ſecante contenti, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus conſtituuntur (8).

IX. Theoremata tandem, quæ ad circulorum portiones attinent hæc quatuor ſunt. I. In eadem recta linea duæ circulorum portiones ſimiles, & inæquales conſtitui non poſſunt ad eaſdem partes (9). II. In æqualibus rectis lineis ſimiles circulorum portiones conſtitutæ, ſunt etiam æquales (10). III In circulis æqualibus, æquales rectæ lineæ, æquales arcus abſcindunt: majorem quidem æqualem majori, minorem vero minori (11). IV. In circulis æqualibus æquales arcus æquales rectæ lineæ ſubtendunt. Hæc propoſitio præcedentem convertit (12).

TER-

[1] Prop. 37. lib. 3. quæ convertitur præcedens, & ex ea colligitur quoque, quæ ex eodem puncto ad circulum ducuntur rectæ, æquales eſſe tangentes.

[2] Prop. 20. lib. 3.

[3] Prop. 21. lib. 3.

[4] Prop. 22. lib. 3.

[5] Prop. 26. lib. 3. Quod in hoc theoremate de æqualibus circulis demonſtrat Euclides, multo fortius de uno eodemque circulo evincitur.

[6] Prop. 27. lib. 3. Quæ converſa eſt præcedentis, & eadem demonſtratio erit, ſi anguli æqualibus circumferentiis ejuſdem circuli inſiſtant.

[7] Prop. 31. lib. 3.

[8] Prop. 32. lib. 3.

[9] Prop. 23. lib. 3.

[10] Prop. 24. lib. 3.

[11] Prop. 28. lib. 3.

[12] Prop. 29. lib. 3. quæ eſt præcedentis converſa.

TERTII LIBRI PROBLEMATA.

X. PRaxes & conſtructiones circulorum, quas Euclides in hoc tertio libro exponit aut circulum ipſum ſpectant, aut ea, quæ circulo adveniunt, quare trifariam digeruntur & in ea, quæ ad circulum quoad ſe inſpectum; & in ea, quæ ad tangentem & in ea tandem, quæ ad angulos in circuli portione conſtituendos attinent.

XI. Primæ claſſis duo ſunt. I. Dati circuli centrum invenire (1). II. Circuli portione data, invenire centrum circuli, cujus ea eſt portio, & circulum perficere (2). III. Datam circuli portionem bifariam dividere (3).

XII. Secundæ vero claſſis unum tantum extat problema, nimirum: Ex dato extra circulum puncto tangentem ad circulum ducere (4).

XIII. Tertiæ tandem claſſis etiam duo ſunt. I. In data recta linea deſcribere portionem circuli, quæ ſuſcipiat angulum æqualem angulo dato (5). II. Ex dato circulo abſcindere portionem, quæ ſuſcipiat angulum æqualem angulo dato (6).

EX QUARTO ELEMENTORUM LIBRO PROBLEMATA.

XIV. PEr ſexdecim propoſitiones diſſerit Euclides in quarto libro de inſcriptione, & circumſcriptione tum figurarum regularium in circulo, tum circuli in figuris regularibus. Figuræ autem regulares, quas potiſſime exponit, ſunt triangulum, quadratum, pentagonum, hexagonum, & quindecagonum (7). Omnes hujus elementi propoſitiones ſunt problemata numero ſexdecim, quarum quatuor reſpiciunt triangulum, quatuor quadratum, totidem pentagonum, unum hexagonum, alterum quindecagonum, & duæ tandem ſunt lemmata; perinde ſecundum haſce tres claſſes præfata problemata exponimus (8). At prius lemmata, utpote ſimpliciora dabimus.

II. Lem-

[1] Prop. 1. lib. 3. Ex hoc problemate eſt perſpicuum, ſi in circulo recta quædam linea rectam aliam quamdam bifariam ſecuerit & ad angulos rectos, in ſecante circuli centrum eſſe.

[2] Prop. 25. lib. 3.

[3] Prop. 30. lib. 3.

[4] Prop. 17. lib. 3.

[5] Prop. 33. lib. 3.

[6] Prop. 34. lib. 3.

[7] Eſto enim ut, & ut infinita circumſcriptionum, & inſcriptionum figurarum contemplatio, Euclides tamen non multum admodum progreſſus eſt. Perveniens namque ad hexagonum, & poſtremo quindecagoni angulus tradens (qui aſtronomo ſcientiam magis ſpectant) finem dicendi fecit; non quod alia, non fuerit ſtructu, ſed quod nullo negotio conſtrui queant, ut Commandinus animadvertit.

[8] Omnes hujus elementi propoſitiones, ut inquit Gulielmus Whiſtonius, Trigonometriæ magis inſerviunt; earum namque ope figurarum & corporum magnitudinem, & variam eorum aſpectus, & circuli quadraturam, & circulorum duplicatam rationem, & plura alia non ab re perſcrutari potuimus.

II. Lemmata duo ſunt, nempe I. In dato circulo aptare rectam lineam, quæ alteri datæ ſit æqualis: oportet autem, ut data recta linea non ſit major diametro dati circuli (1). II. Æquicrure triangulum conſtituere, cujus uterque angulorum ad baſim duplus ſit anguli verticalis (2).

III. Ex quidem circa figuras trilateras, ſive triangula, quatuor proferuntur problemata, ſuntque ſequentia I. In dato circulo deſcribere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato (3). II. Circa datum circulum deſcribere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato (4). III. In dato triangulo circulum deſcribere (5). IV. Circa datum triangulum circulum deſcribere (6).

IV. Circa vero figuras quadrilateras hæc quatuor alia extant problemata. I. In dato circulo quadratum deſcribere (7). II. Circa datum circulum quadratum deſcribere (8). III. In dato quadrato circulum deſcribere (9). IV. Circa datum quadratum circulum deſcribere (10).

V. Ad multilateras tandem figuras ſpectant ſex reliquæ propoſitiones, quarum quatuor ad pentagonum attinent, una ad hexagonum, & altera ad quindecagonum. Igitur I. In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere (11). II. Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere (12). III. In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum deſcribere (13). IV. Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere (14). V. In dato circulo hexagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere (15). VI. In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere (16).

[1] Prop. 1 lib. 4. Hæc, omneſque aliæ quarti libri propoſitiones Euclidi adſcribuntur, demptis ſolummodo quatuor illis, quæ ad triangulum ſpectant, quas teſte Andrea Tacquetto Thaleti Mileſio debentur, qui ob earum inventionem [illegible] bovem immolaſſe perhibetur.

[2] Prop. 10 lib. 4.
[3] Prop. 2 lib. 4.
[4] Prop. 3 lib. 4.
[5] Prop. 4 lib. 4.
[6] Prop. 5 lib. 4.
[7] Prop. 6 lib. 4.
[8] Prop. 7 lib. 4.
[9] Prop. 8 lib. 4.
[10] Prop. 9 lib. 4.
[11] Prop. 11 lib. 4.
[12] Prop. 12 lib. 4.
[13] Prop. 13 lib. 4.
[14] Prop. 14 lib. 4.
[15] Prop. 15 lib. 4. Poſt hoc problema Euclides duo alia pro ſuæ doctrinæ ordine adnectere debuerat, unum de deſcriptione hexagoni circa datum circulum; alterum de deſcriptione circuli in dato hexagono; imo etiam & eundem de deſcriptione circuli circa datum hexagonum. Atque alia de circumſcriptione quindecagoni circa circulum, & reliqua; ſed hæc facillima, & nullius negotii aliorum ſtudio commiſit.
[16] Prop. 16 lib. 4.

EX QUINTO ELEMENTORUM LIBRO THEOREMATA.

I UTilem, neceſſariamque proportionum doctrinam generatim inſpecturus (1) per viginti quinque propoſitiones exponit Euclides in hoc quinto libro (2): ſuntque omnes theoremata, quæ Eudoxus quidam, qui Platonis magiſter fuit, adinvenit, & Euclides ſolum collegit, ut aiunt Eudemus, Proclus, Commandinus, aliique; per hæc magnitudines generatim inter ſe comparatas conſiderat, earumque analogiam perſcrutatur. Quoniam autem Euclides cum omnibus Veteribus proportionum ipſam ope multiplicium demonſtrat, propterea omnia theoremata hujus elementi in tres claſſes commode digeruntur, partim enim reſpiciunt quantitates æquemultiplices, partim quantitates proportionales, partim demum mutationes, quæ fiunt per terminos proportionales, quas argumentandi modos e proportione petitos appellant.

DE QUANTITATIBUS ÆQUEMULTIPLICIBUS.

II SEx ſunt, quæ quantitates æquemultiplices ſpectant, theoremata, nimirum. I Si fuerint quotcumque magnitudines, quotcumque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquemultiplices, quamplex eſt una unius, totuplices erunt & omnes omnium (3). II. Si prima ſecundæ tam multiplex fuerit, quam tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ tam multiplex, quam ſexta quartæ; erit compoſita ex prima, & quinta tam multiplex ſecundæ,

D quam

[1] Totum hoc quintum planorum elementum commune eſt Geometriæ, Arithmeticæ, Muſicæ, Aſtronomiæ, Staticæ, & omni ſimpliciter Matheſeos diſciplinæ; quæ enim in ipſo demonſtrantur theoremata nedum Geometriæ congruunt, verum ad ceterarum omnium uſus, & contemplationes referuntur, quippe quæ proportionibus inter ſe connexis ſive inituntur, & modos de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc mutuari ſolent. Speciatim vero Geodeſia, ſeu practica Geometria, quæ linearum, figurarum, atque corporum menſuras, quas complectitur, e proportionum doctrina plurimum excerpit; & Arithmetica, cujus omnes propoſitiones, etiam ſubtiliores ſeptimo, octavo, & nono, deinceps ex profeſſo agentibus libris, in hoc demonſtrari commode poſſent, & Statica, quæ non niſi per doctrinam proportionum corporum pondera perſcrutaretur. Ceterum tam utile eſt, & neceſſarium, ut ſi ejus doctrina de medio auferretur, nihil præclarum, aut egregium in Matheſi relinqueretur.

[2] Quamquam propoſitiones omnes hujus elementi innumeræ ſint, Euclides tamen ſolum 25 collegit, cetera vero, quæ in libro adjecta reperiuntur, a Campano, Theone aliiſque fuerunt addita.

[3] Prop. 1 lib. 5.

quam compoſita ex tertiæ, & ſexta multiplex quartæ (1). III. Si primæ ſecundæ tam multiplex fuerit, quam tertia quartæ, æquemultiplices primæ, & tertiæ erunt etiam æquemultiplices ſecundæ, & quartæ (2). IV. Si prima ad ſecundam eamdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, æquemultiplices primæ, & tertiæ ad æquemultiplices ſecundæ, & quartæ eamdem quoque rationem habebunt (3). V. Si tota totius tam multiplex ſit, quam ablata ablatæ, erit reliqua reliquæ tam multiplex, quam tota totius (4). VI. Si duæ magnitudines æquemultiplices fuerint duarum magnitudinum, & ex iis ablatæ quædam ſint earumdem æquemultiplices, erunt & reliquæ vel iiſdem æquales, vel earumdem æquemultiplices (5).

DE QUANTITATIBUS PROPORTIONALIBUS, SEU DE PROPRIETATIBUS PROPORTIONIS.

115 AD quantitates proportionales duodecim alia theoremata ſpectant. I. Æquales ad eamdem, eamdem habent rationem, & eadem ad æquales (6). II. Inæqualium magnitudinum major ad eamdem majorem habet rationem, & eadem ad minorem (7). III. Quæ ad eamdem eamdem habent rationem, inter ſe ſunt æquales: & ad quas eadem eamdem rationem habet, etiam inter ſe æquales ſunt (8). IV. Ad eamdem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem habet rationem, illa major eſt: ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa eſt minor (9). V. Rationes, quæ eidem ſunt æquales, inter ſe ſunt etiam æquales (10). VI. Si fuerint quotcumque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes (11). VII. Si prima habuerit ad ſecundam eamdem rationem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam habuerit rationem majorem, quam quinta ad ſextam, & prima ad ſecundam majorem quoque rationem habebit, quam quinta ad ſextam (12). VIII. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, primæ, & ſecundæ erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores tertiæ, & quartæ. Hoc theorema lemma

[1] Prop. 2. lib. 5.
[2] Prop. 3. lib. 5.
[3] Prop. 4. lib. 5. Hoc theorema proprius ſpectat ad demonſtrationem definitionis magnitudinum, quæ ſunt in eadem proportione, ut eſt, quando æquemultiplices primæ, & tertiæ, videlicet antecedentium, atque æquemultiplices ſecundæ & quartæ, hoc eſt conſequentium, vel una ſuperant, vel una æquales ſunt, vel una deficiunt; hic enim demonſtrat & ipſas inter ſe eamdem habere proportionem, ut habet Commandinus.
[4] Prop. 5. lib. 5.
[5] Prop. 6. lib. 5.
[6] Prop. 7. lib. 5.
[7] Prop. 8. lib. 5.
[8] Prop. 9. lib. 5.
[9] Prop. 10. lib. 5.
[10] Prop. 11. lib. 5.
[11] Prop. 12. lib. 5.
[12] Prop. 13. lib. 5.

ma eſt ſexdecimi theorematis (1). IX. Partes cum ſuis multiplicibus comparatæ eamdem cum iis ſervant rationem (2). X. Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam, erit & reliqua ad reliquam, ut tota ad totam (3). XI. Si prima ad ſecundam habuerit eamdem rationem, quam tertia ad quartam, fuerit autem ut quinta ad ſecundam, ita ſexta ad quartam, erit compoſita ex prima, & quinta ad ſecundam, ut compoſita ex tertia, & ſexta ad quartam (4). XII. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima, & minima ipſarum ſimul reliquis duabus majores erunt (5).

DE ARGUMENTANDI MODIS E PROPORTIONE PETITIS.

IV. MOdos argumentandi, qui ex proportione eruuntur ſequentia novem oſtendunt theoremata. I. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & invertendo etiam proportionales erunt (6). II. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutando etiam proportionales erunt (7). III. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & dividendo etiam proportionales erunt (8). IV. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & componendo etiam proportionales erunt (9). V. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & convertendo etiam proportionales erunt (10). VI. Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis totidem, primæ ipſarum erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem. Hoc theorema eſt lemma vigeſimi ſecundi (11). VII. Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus, primæ ipſarum quoque erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem. Theorema illud eſt lemma vigeſimi tertii (12). VIII. Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus, primæ ipſarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt (13). IX. Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, primæ ipſarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt (14).

(1) Prop.14.lib.5.
(2) Prop.15.lib.5.
(3) Prop.19.lib.5.
(4) Prop.24.lib.5.
(5) Prop.25.lib.5.
(6) Coroll. prop.4.
(7) Prop.16.lib.5.
(8) Prop.17.lib.5.
(9) Prop.18.lib.5.
(10) Coroll.prop.19.
(11) Prop.20.lib.5.
(12) Prop.21.lib.5.
(13) Prop.22.lib.5.
(14) Prop.23.lib.5.

EX SEXTO ELEMENTORUM LIBRO.

I. Quam in quinto libro univerſim de omni magnitudine expoſuit proportionis doctrinam Euclides, variis peculiaribus uſibus planarum figurarum applicare contendit in hoc ſexto libro, quare propoſitiones, quæ in quibuſvis figuris planis occurrere poſſunt, demonſtrare conatur (1). Triginta tribus propoſitionibus, quarum tres, & viginti ſunt theoremata, & decem problemata, totum ſuum complet intentum: quæ omnia per certas claſſes ſic proferre curabimus.

THEOREMATA SEXTI LIBRI.

II. Hujus libri theoremata juxta varias planorum proportiones, quas exhibent, quatuor claſſibus facili negotio comprehenduntur: alia enim ſpectant lineas, alia angulos, & ſectores, alia triangula, & alia demum reliquas figuras rectilineas, ſecundum quas claſſes ea hoc ordine recenſebimus.

DE PROPORTIONE RECTARUM, QUIBUS FIGURÆ RECTILINEÆ CONTINENTUR, ET DE PROPORTIONE ANGULORUM, ATQUE SECTORUM.

III. Propoſitiones igitur, quæ ad rectarum proportionem ſpectant, quibus figuræ ipſæ continentur, per hæc tria theoremata exponit Euclides. I. *Si fuerint quatuor rectæ lineæ proportionales erit rectangulum ex mediis æquale rectangulo ex extremis, & viciſſim ſi rectangulum ex mediis æquale ſit rectangulo ex extremis, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt* (2). II. *Si ſint tres rectæ lineæ proportionales, erit rectangulum ex extremis æquale quadrato quod deſcribitur a media, & viciſſim, ſi rectangulum ex extremis æquale ſit quadrato a media deſcripto, tres rectæ lineæ proportionales erunt* (3). III. *Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, erunt rectilinea ſimilia, ſimiliterque ab eis deſcripta etiam proportionalia: & viciſſim ſi rectilinea proportionalia ſint, ipſæ rectæ lineæ etiam proportionales erunt* (4).

IV. Ad ſecundam claſſem de angulis & ſectoribus unum attinet theorema, nimirum: *In æqualibus circulis anguli ſive ad centra, ſive ad cir-*

(1) Totum hoc ſextum Elementum Euclidi inventori vulgo adſcribitur: attamen complures alii veteri ejuſdem propoſitionibus inſudarunt, quoſque Græcæ Geometriæ ſummi ſæculi ipſis incumbebant, ut Plato, Archytas Tarentinus, Menæchmus, Eratoſthenes, Philo Byzantinus, Hero, Apollonius Pergæus, Nicomedes, Pappus, aliique, teſtibus Eudemo, Proclo, & Eutochio.

(2) Prop. 16. lib. 6. Hinc cujuſlibet trianguli rectanguli aream ex notis lineæ rectæ dimenſione facile invenimus.

(3) Prop. 17. lib. 6. Hinc lineam inacceſſam, cujus terminus alter eſt acceſſibilis, metiri diſcimus.

(4) Prop. 22. lib. 6.

circumferentiis poſiti, eamdem habent rationem cum arcubus, quibus inſiſtunt; ſimiliter autem & ſectores (1).

DE PROPORTIONE, ET SIMILITUDINE TRIANGULORUM.

V. Circa propoſitiones certæ claſſis, quæ pertinent ad proportionem, atque ſimilitudinem triangulorum duo theoremata ſunt, quæ verſantur circa triangula in genere, nempe. I. Si uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, ea ſecabit alia duo latera proportionaliter; & viciſſim ſi ſecet proportionaliter duo latera trianguli, ea tertio lateri parallela erit (2). II. Recta, quæ ſecat angulum verticalem alicujus trianguli biſariam, ſecabit baſim in ratione laterum; & viciſſim recta, quæ ſecat baſim alicujus trianguli in ratione laterum, ſecabit angulum verticalem biſariam (3). Alia theoremata demonſtrant proprietates trianguli rectanguli ſpeciatim, ſuntque duo ſequentia. I. Si in triangulo rectangulo ex angulo recto ad baſim perpendicularis demittatur, hæc dividet triangulum in duo alia triangula, quæ tum toti, tum inter ſe ſimilia erunt (4). II. In triangulis rectangulis figura quævis a latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis erit figuris, quæ illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ, deſcribuntur a lateribus rectum angulum continentibus (5).

VI. Per alias tandem propoſitiones comparantur triangula inter ſe ſive quoad aream, ſive quoad ſimilitudinem. Circa comparationes quoad aream hæc tria extant theoremata. I. Triangula, & parallelogramma eamdem altitudinem habentia inter ſe ſunt ut baſes (6). II. Triangula, quæ æqualia ſunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia; & viciſſim triangula, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, ſunt etiam æqualia inter ſe (7). III. Triangu-

la

(1) Prop. 33 lib. 6. Hinc perſpicitur eſſe, ut [illegible], angulum eſſe ad angulum, ut ſector ad ſectorem.

(2) Prop. 2. lib. 6. Hoc theorema nos quoque docet, ſi ad unum trianguli latus ductæ fuerint plures parallelæ, ſecari omnia latera in ſegmenta proportionalia.

(3) Prop. 3. lib. 6. Quod theorema ſupponit etiam, ſi recta, quæ angulum trianguli biſariam ſecat, & biſecabit etiam baſim, triangulum fore iſoſceles, quia duo latera habebit æqualia, & biſecans recta erit perpendicularis baſi.

(4) Prop. 8. lib. 6. Ex hoc theoremate eſt manifeſtum, ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducitur, eam ipſam baſis partes habere mediam proportionalem eſſe: & quodlibet latus trianguli medium eſſe proportionale inter baſim, & utramque partem.

(5) Prop. 31. lib. 6. Hoc theorema univerſale eſt propoſitionis 47. lib. 1. quæ extenditur ad omnes rectilineas figuras.

(6) Prop. 1. lib. 6. Hoc eſt manifeſtum theorema, a quo ſolum ferme dependet dimenſionum [illegible] quidquid de [illegible] figuris ſive plani, ſive ſolidi fuit unquam demonſtratum, ab illo dependet.

(7) Prop. 15 lib. 6. Ex hoc, & præcedenti theoremate evincitur, tum parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant baſes, & altitudines, eſſe æqualia: & contra.

ia ſimilia ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum homologorum (1).

VII. Tandem de ſimilitudine triangulorum hæc quinque alia extant theoremata. I. Triangula æquiangula habent latera circum æquales angulos proportionalia; & homologa ſunt latera illa, quæ æquales angulos ſubtendunt (2). II. Triangula, quæ latera habent proportionalia, erunt etiam æquiangula, & æquales habebunt eos angulos, quos homologa latera ſubtendunt (3). III. Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, & latera circum iſtos angulos proportionalia, ſunt etiam æquiangula; & æquales habent angulos illos, quos homologa latera ſubtendunt (4). IV. Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, latera vero circum alios angulos proportionalia, & reliquos angulos ejuſdem ſpeciei inter ſe, hoc eſt utrumque vel majorem, vel minorem recto, erunt etiam æquiangula; & æquales habebunt angulos illos, circa quos ſunt latera proportionalia (5). V. Si duo triangula habent duo latera duobus lateribus proportionalia, & compoſita ad eundem angulum habeant quoque latera homologa parallela, reliqua eorum latera in directum erunt (6).

DE RELIQUIS FIGURIS RECTILINEIS

VIII. QUæ tandem theoremata reliquas figuras rectilineas proportionales oſtendunt, ſunt ſeptem, quæ ſequuntur. I. Parallelogramma, quæ æqualia ſunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia: & viciſſim parallelogramma, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, ſunt etiam æqualia inter ſe (7). II. Polygona ſimilia dividuntur in triangula numero æqualia, ſimilia, & homologa totis; duplicatamque habent rationem laterum homologorum (8). III. Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, inter ſe ſunt ſimilia (9). IV. Parallelogramma æquiangula habent inter ſe rationem ex lateribus compoſitam (10). V. Parallelogramma, quæ

(1) Prop.19.lib.6.
(2) Prop.4.lib.6.
(3) Prop.5.lib.6.
(4) Prop.6.lib.6.
(5) Prop.7.lib.6. Ex hoc, & quatuor præcedentibus theorematis conſtat ſimilitudinem triangulorum ſtatui poſſe, ſi habeant latera proportionalia, ſi habeant unum angulum uni angulo æqualem, & latera circum æquales angulos proportionalia, & reliquos angulos ejuſdem ſpeciei inter ſe.
(6) Prop.32.lib.6.

(7) Prop.14.lib.6. Ex theoremate iſto pendet demonſtratio regulæ inverſæ, & vi reciprocæ proportionis, qua ex datis tribus terminis quartus invenitur, multiplicando in ſe invicem duos priores, & factum dividendo per tertium, inde habetur quartus.
(8) Prop.20.lib.6. Ex hoc theoremate indicatur methodus figuras quaſcunque rectilineas augendi, vel minuendi in ratione data.
(9) Prop.21.lib.6.
(10) Prop.23.lib.6.

quæ ſunt circa diametrum alterius, cum toti, tum inter ſe ſimilia ſunt (1). VI. Si a parallelogrammo aliud auferatur, quod communem cum eo angulum habens, ſit eidem ſimile, ſimiliterque poſitum, conſiſtet cum illo circa eandem diagonalem (2). VII. Omnium parallelogrammorum, quæ ad eandem rectam applicata, deficiunt parallelogrammis alicui dato ſimilibus, maximum eſt illud, quod applicatur ſuper dimidia (3).

SEXTI LIBRI PROBLEMATA

IX. EOdem tandem ordine ſexti elementi problemata ſive ad rectas, ſive ad figuras proportionales conſtituendas ſpectant, ſuntque decem.

X. Primæ Claſſis ſunt ſex problemata. I. A data recta linea imperatam partem abſcindere (4). II. Datam rectam lineam ſecare in partes proportionales partibus, in quas ſecta eſt alia data recta linea (5). III. Datis duabus rectis lineis tertiam proportionalem invenire (6). IV. Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire (7). V. Duabus datis rectis lineis medium proportionalem invenire (8). VI. Datam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione dividere (9).

XI. Secundæ vero claſſis, quæ ad proportionem rectilineorum ſpectant, quatuor problemata ſunt. I. A data recta linea dato rectilineo, ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere (10). II. Rectilineum conſtituere, quod ſit ſimile uni dato, & æquale alteri dato (11). III. Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens parallelogrammo, quod alteri dato ſit ſimile: oportet autem, ut datum rectilineum non majus ſit eo parallelogrammo, quod applicatum ſuper dimidia datæ rectæ lineæ, deficit parallelogrammo, quod eidem dato eſt ſimile (12). IV. Ad datam rectam lineam dato rectilineo, æquale parallelogrammum applicare excedens parallelogrammo, quod alteri dato ſit ſimile (13).

[1] Prop. 24. lib. 6.
[2] Prop. 26. lib. 6. Hanc theorematum compoſitionem eſtimata diſtinctum ex Whiſtono apud Tacquetum.
[3] Prop. 27. lib. 6.
[4] Prop. 9. lib. 6.
[5] Prop. 10. lib. 6. Ex hoc problemate diſcitur modus, quo recta data in quotvis æquales partes ſecari poterit.
[6] Prop. 11. lib. 6.
[7] Prop. 12. lib. 6.
[8] Prop. 13. lib. 6.

[9] Prop. 30. lib. 6. Hujus ſectionis admirabilis eſt uſus in corporum regularium inſcriptione, & comparatione, ut ait Tacquetus.
[10] Prop. 18. lib. 6. Hinc methodus aperitur addiſcendi omnia in tabellis deſcribendi: etenim per hoc problema figuræ, quantæcumque ingentes, ad ſimiles figuras exiguas rediguntur, & contra.
[11] Prop. 25. lib. 6.
[12] Prop. 28. lib. 6.
[13] Prop. 29. lib. 6.

99934903